

Peilung von einer Bodenstation (Ground)
zu einem fliegenden Ziel (Mobile)
mit einer Richtantenne
an einer gekippten azimutalen Montierung

Grundprinzip

2013-11-05

Sphärische Trigonometrie

Allgemeines sphärisches Dreieck:

Sinus-Satz

$$\sin(a) / \sin(\alpha) = \sin(b) / \sin(\beta)$$

Seiten-Cosinus-Satz

$$\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \cos(\gamma)$$

Winkel-Cosinus-Satz

$$\cos(\gamma) = -\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(c)$$

Sinus-Cosinus-Satz

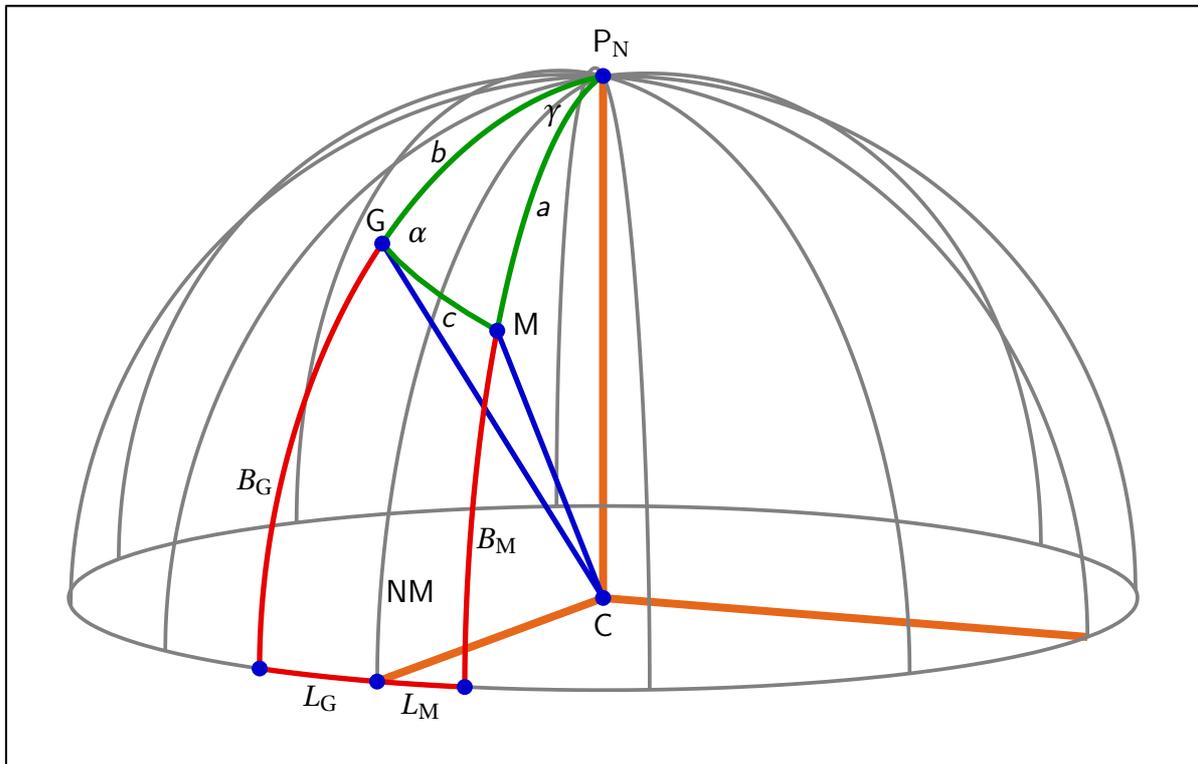
$$\sin(c) \cdot \cos(\beta) = \cos(b) \cdot \sin(a) - \sin(b) \cdot \cos(a) \cdot \cos(\gamma)$$

Rechtwinkliges sphärisches Dreieck:

$$\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b)$$

$$\sin(\alpha) = \sin(a) \sin(c)$$

$$\cos(\alpha) = \cos(a) \cdot \sin(\beta)$$



Azimut-Bestimmung

Die Punkte G (Ground) und M (Mobile) haben die geografischen Koordinaten L_j und B_j . Zusammen mit dem Nordpol P_N ist ein sphärisches Dreieck (grün) gegeben. Von diesem sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt, in üblicher Bezeichnung a, b, γ . Gesucht sind die dritte Seite (Peilspur) und die Peilrichtung zwischen dieser Seite und der Nordrichtung mit G als Scheitel, das Azimut, in üblicher Bezeichnung c, α . Das Azimut wird von Nord über Ost gezählt, in der Skizze ist $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Drei Formeln der sphärischen Trigonometrie führen zur Lösung:

$$\begin{aligned} \cos(c) &= \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \cos(\gamma) && \text{Seiten-Cosinussatz,} \\ \sin(\alpha) / \sin(a) &= \sin(\gamma) / \sin(c) && \text{Sinussatz,} \\ \sin(c) \cdot \cos(\alpha) &= \cos(a) \cdot \sin(b) - \sin(a) \cdot \cos(b) \cdot \cos(\gamma) && \text{Sinus-Cosinussatz.} \end{aligned}$$

Es sind

$$\gamma = L_M - L_G, \quad a = 90^\circ - B_M, \quad b = 90^\circ - B_G,$$

wobei L östlich des Nullmeridians NM positiv gezählt wird, westlich negativ.

Einsetzen und Umformen liefert:

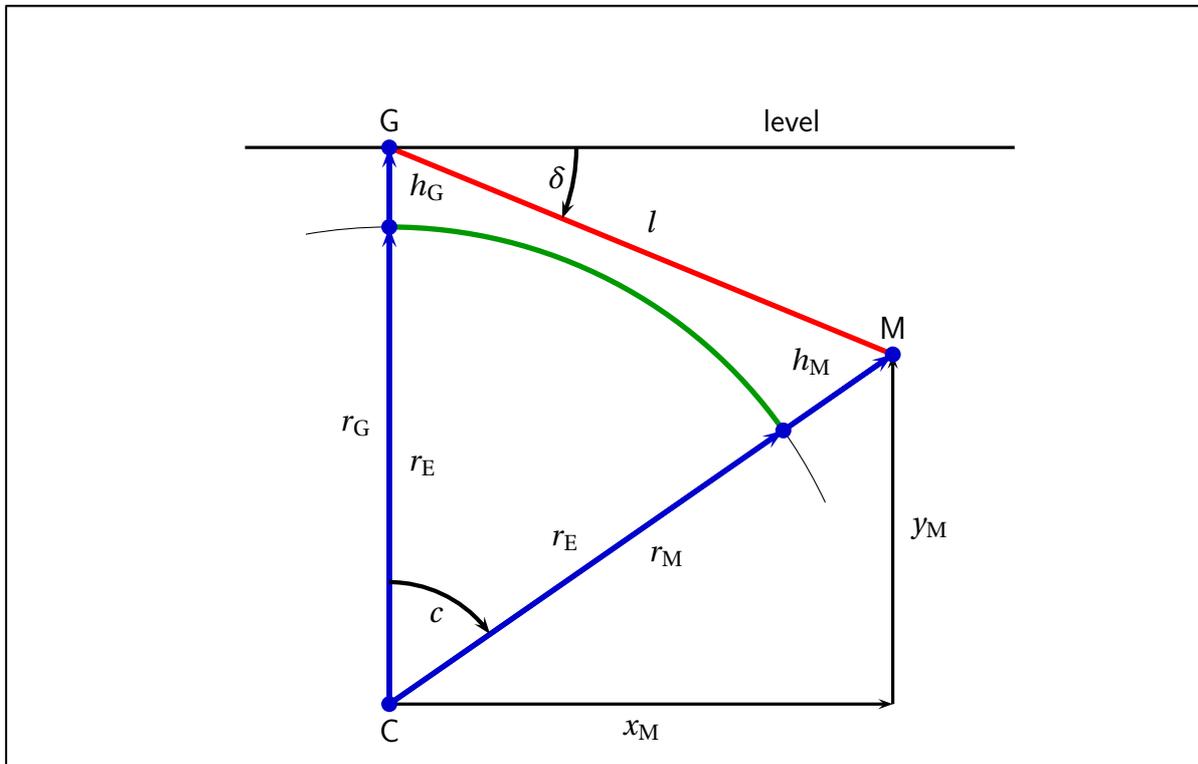
$$\begin{aligned} \cos(c) &= \sin(B_M) \cdot \sin(B_G) + \cos(B_M) \cdot \cos(B_G) \cdot \cos(L_M - L_G), && (\nearrow \text{Seite 7}) \\ \sin(\alpha) \cdot \sin(c) &= \cos(B_M) \cdot \sin(L_M - L_G), \\ \cos(\alpha) \cdot \sin(c) &= \sin(B_M) \cdot \cos(B_G) - \cos(B_M) \cdot \sin(B_G) \cdot \cos(L_M - L_G). \end{aligned}$$

Anmerkung:

Zur Berechnung von α wird $\alpha = \text{atan2}(\sin(\alpha), \cos(\alpha))$ verwendet, was $-\pi < \alpha \leq \pi$ liefert.

Für $\alpha < 0$ wird mit $\alpha := \alpha + 2\pi$ auf $0 < \alpha \leq 2\pi$ umgerechnet.

Weil $\text{atan2}(y, x) = \text{atan2}(c \cdot y, c \cdot x)$ ist zweckmäßig $\alpha = \text{atan2}(\sin(\alpha) \cdot \sin(c), \cos(\alpha) \cdot \sin(c))$.



Altitude-Bestimmung

Der Bahnschnitt stellt die Situation für die glatte Erdkugel mit dem Radius r_E dar. Zum Bogen der Bahnspur (grün) gehört der ermittelte Winkel c mit dem Erdmittelpunkt C als Scheitel. Die Höhen h_j über NN von Site und Target sind bekannt und damit die Radien $r_G = r_E + h_G$ und $r_M = r_E + h_M$.

Gesucht wird der Peilwinkel δ als Altitude bezogen auf den Horizont. Zum Zenit hin ist er positiv; in der Skizze ist er negativ.

Wie legen ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Ursprung in C und der y-Achse durch G fest. Für G ist dann $x_G = 0$, $y_G = r_G$ und für M ist $x_M = r_M \cdot \sin(c)$, $y_M = r_M \cdot \cos(c)$. Für den Peilwinkel δ gilt dann

$$\tan(\delta) = \Delta y / \Delta x = \frac{r_M \cdot \cos(c) - r_G}{r_M \cdot \sin(c)} = \frac{(r_E + h_M) \cdot \cos(c) - (r_E + h_G)}{(r_E + h_M) \cdot \sin(c)}.$$

Anmerkungen:

Für den Erdradius ist $R_E = 6371000\text{m}$ einzusetzen.

Für kurze Entfernungen ist $\tan(\delta) \approx (h_M - h_G) / l_{GM}$ mit l_{GM} als Entfernung von G zu M.

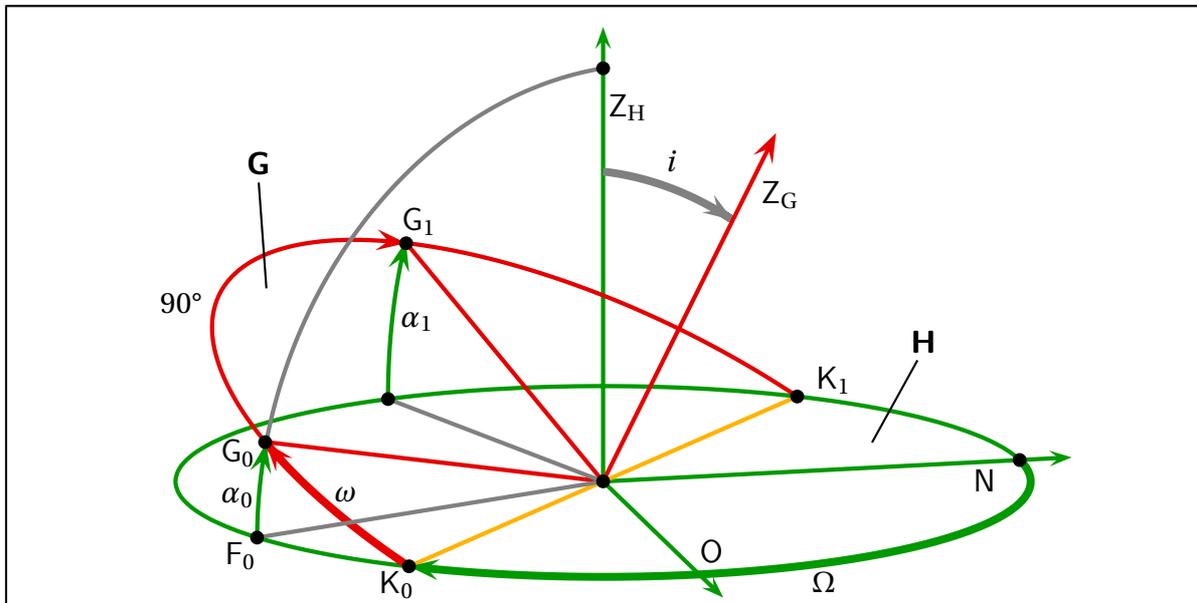
Für den Blick zum (idealen) Horizont H ist $\delta_H < 0$ mit $\cos(\delta_H) = r_E / (r_E + h_G)$.

Die Entfernung von G bis zum Horizont beträgt dann $l_H = \sqrt{h_G \cdot (2 \cdot r_E + h_G)} \approx \sqrt{2 \cdot r_E \cdot h_G}$.

Anmerkungen zu den Peilwinkel-Berechnungen:

Die C-Funktionen "AzimuthTowardsMobile()" und "AltitudeTowardsMobile()" liefern zu den Koordinaten von G und M das Azimut und die Altitude als Peilwinkel von G nach M zurück. Mit den Programm "SRS_navi_ground" lassen sich diese Funktionen testen.

Die C-Funktion "AngleTowardsGround()" liefert zu den Koordinaten von G und M sowie dem Azimut der Längsachse des Fliegers den (horizontalen) Peilwinkel von M nach G bezogen auf die Längsachse des Fliegers zurück. Mit den Programm "SRS_navi_mobile" lässt sich diese Funktion testen.



Horizontebene, G-Sensor-Ebene und G-Sensor-Signale

Die beiden G-Sensoren G_0 und G_1 spannen eine Ebene \mathbf{G} auf, die gegenüber der Horizontebene \mathbf{H} verkippt ist. Diese Ebenen haben als Schnittgerade die Knotenlinie $\overline{K_0K_1}$.

Die Achsen der beiden G-Sensoren stehen orthogonal zueinander.

Die G-Sensoren liefern die Signale g_0 und g_1 .

Die G-Sensor-Ebene liegt horizontal, wenn $g_0 = g_1 = 0$.

Bildet eine G-Sensor-Achse mit der Horizontebene den Winkel α , gilt allgemein $g = \sin(\alpha)$.

Inklination i : Winkel der Verkipfung der G-Sensor-Ebene zur Horizontebene, auch Winkel der G-Sensoren-Normale Z_G zur Zenitrichtung Z_H ,

Knotenwinkel Ω : Winkel der Knotenlinie $\overline{K_0K_1}$ mit der Nordrichtung N , ist Azimut der Knotenlinie

Positionswinkel ω : Winkel der Achse des G_0 -Sensors mit der Knotenlinie, zur Achse von G_1 gehört der Winkel $\omega + 90^\circ$.

Im rechtwinkligen sphärischen Dreieck $\Delta K_0F_0G_0$ gilt $\sin(\alpha_0) = \sin(i) \cdot \sin(\omega)$ und entsprechend gilt $\sin(\alpha_1) = \sin(i) \cdot \sin(\omega + 90^\circ)$, woraus die von Ω unabhängigen Signalstärken der G-Sensoren folgen:

$$\sin(\alpha_0) = g_0 = \sin(i) \cdot \sin(\omega),$$

$$\sin(\alpha_1) = g_1 = \sin(i) \cdot \cos(\omega).$$

Aus einem Messwertpaar $(g_0; g_1)$ oder $(\alpha_0; \alpha_1)$ folgen damit umgekehrt für die Parameter

$$i = \operatorname{asin}(\sqrt{\sin^2(\alpha_0) + \sin^2(\alpha_1)}) = \operatorname{asin}(\sqrt{g_0^2 + g_1^2}),$$

$$\omega = \operatorname{atan2}(\sin(\alpha_0), \sin(\alpha_1)) = \operatorname{atan2}(g_0, g_1).$$

Anmerkungen:

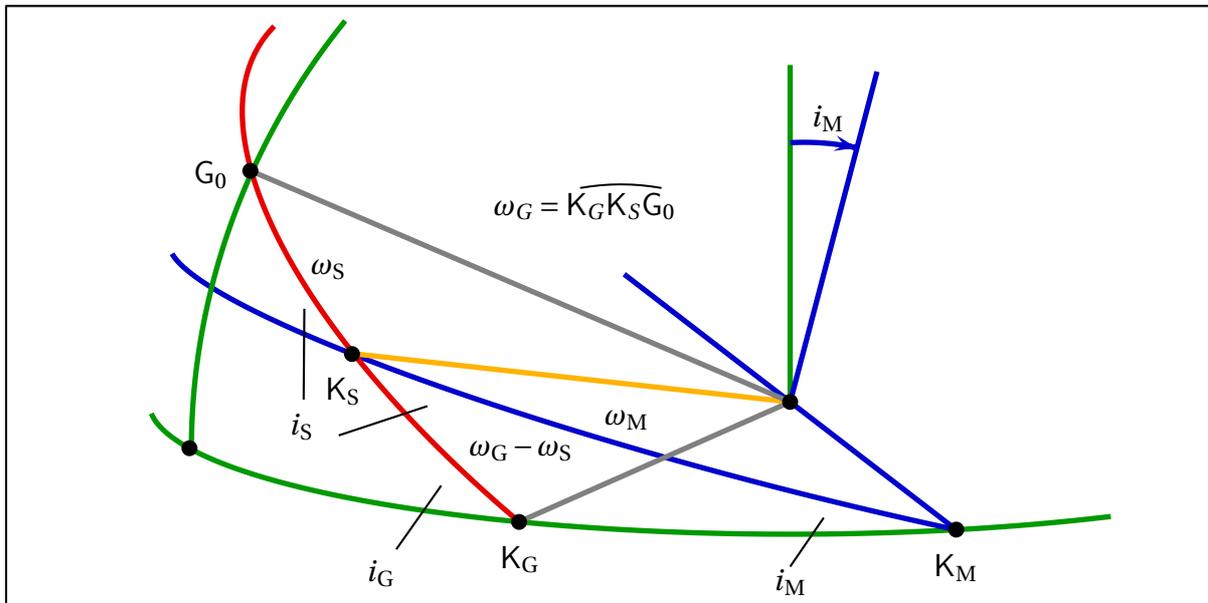
Die Normierung der Signalstärken der G-Sensoren auf 1 bei $\alpha = 90^\circ$ ist von der lokalen Stärke des Schwerfelds $g_{B,h}$ mit B als geografischer Breite und h als Höhe über NN abhängig.

Für online-Berechnungen siehe <http://www.ptb.de/cartoweb3/SISproject.php>.

Formel nach http://en.wikipedia.org/wiki/Earth's_gravity, auf vier Dezimalen gerundet, h in Meter:

$$g_{B,h} = 9.7803 \cdot (1 + 0.0053 \cdot \sin^2(B) - 3.155 \times 10^{-7} \cdot h) \text{m/s}^2.$$

Für Nieder-Erlenbach gilt $g_{50.2^\circ, 135\text{m}} \approx 9.8106 \text{m/s}^2$.



Parameter einer verkippt aufgestellten Montage mit verkippt eingebauten G-Sensoren

Die G-Sensoren sind aus Montagegründen gegenüber der Grundebene der Montage verkippt. Diese Sensorverkipfung wird vorab auf einer horizontal ausgerichteten Platte ausgemessen und ist mit den Parametern i_S und ω_S eine Systemkonstante.

Bei der Aufstellung im Gelände ist die Azimutachse der Montage gegenüber der Zenitrichtung verkippt. Die G-Sensoren liefern Messwerte, aus denen die Verkipfung der G-Sensor-Ebene zur Horizontebene folgt, hier i_G und ω_G .

Aus den beiden Parameterpaaren i_S , ω_S und i_G , ω_G sind die Werte der Verkipfung der Grundebene der Montage zu berechnen: i_M und ω_M .

Zusammenstellung der Bezeichnungen:

- i_S : Inklination der G-Sensor-Ebene gegenüber der Grundebene der Montage,
- K_S : Scheitelpunkt von i_S ,
- ω_S : Winkel der Achse des G_0 -Sensors zur Knotenlinie mit dieser Grundebene,
- i_M : Inklination der Grundebene der Montage gegenüber der Horizontebene,
- K_M : Scheitelpunkt von i_M ,
- ω_M : Winkel der Achse des G_0 -Sensors zur Knotenlinie mit der Horizontebene,
- i_G : Inklination der G-Sensor-Ebene gegenüber der Horizontebene,
- K_G : Scheitelpunkt von i_G ,
- ω_G : Winkel der Achse des G_0 -Sensors zur Knotenlinie mit der Horizontebene,

Wir betrachten das sphärische Dreieck $\Delta K_G K_M K_S$. Von diesem Dreieck sind die Winkel i_S und $(180^\circ - i_G)$ sowie die dazwischen liegende Seite $(\omega_G - \omega_S)$ bekannt.

Für die gesuchten Stücke folgen aus dem Winkel-Cosinussatz und dem Sinussatz mit den Umrechnungen $\sin(180^\circ - i_G) = \sin(i_G)$ und $\cos(180^\circ - i_G) = -\cos(i_G)$ die Gleichungen:

$$\cos(i_M) = \cos(i_S) \cdot \cos(i_G) + \sin(i_S) \cdot \sin(i_G) \cdot \cos(\omega_G - \omega_S),$$

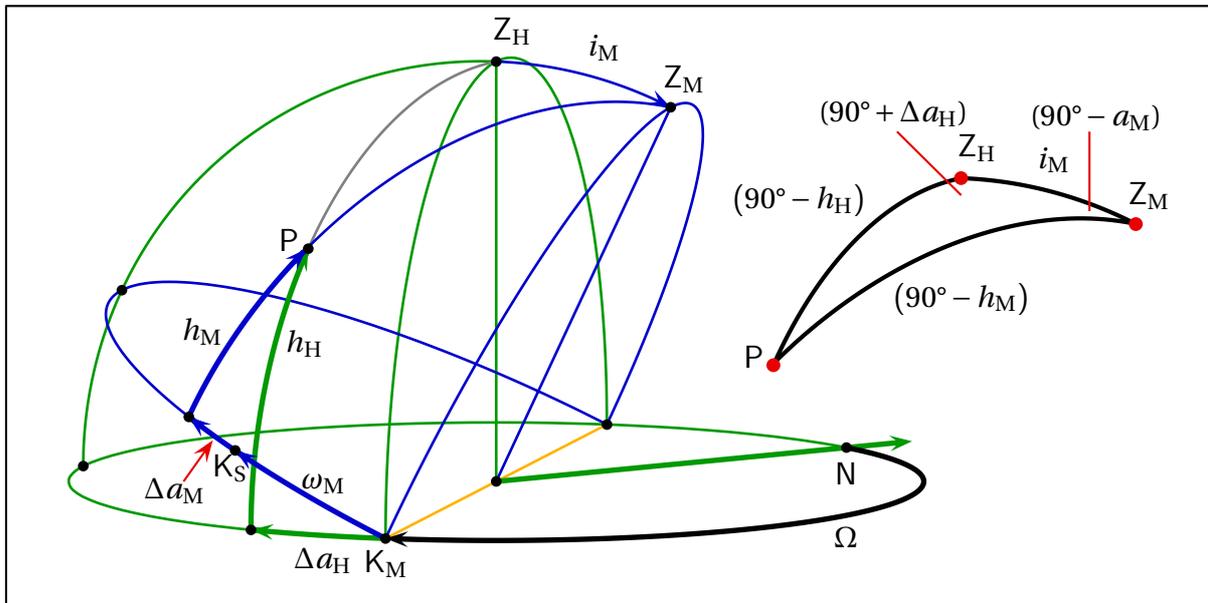
$$\cos(\omega_M) \cdot \sin(i_M) = \cos(i_S) \cdot \cos(i_M) - \cos(i_G),$$

$$\sin(\omega_M) \cdot \sin(i_M) = \sin(\omega_G - \omega_S) \cdot \sin(i_G),$$

und schließlich

$$i_M = \arccos(\cos(i_M)),$$

$$\omega_M = \operatorname{atan2}(\sin(\omega_M) \cdot \sin(i_M), \cos(\omega_M) \cdot \sin(i_M)).$$



Transformation zwischen Horizontsystem und Montierungssystem

Die Antenne ist an einer Montierung mit orthogonalen Drehachsen befestigt. Die Azimutachse der Montierung ist gegenüber der Zenitrichtung verkippt, die Verkipfung ist durch i_M und ω_M bekannt. Folgende ergänzende Bezeichnungen werden verwendet:

- a_H : Azimut im Horizontsystem, von 0° für N über O wachsend, $a_H = \Omega + \Delta a_H$,
- Ω : Azimut des Knotes K_M im Horizontsystem,
- Δa_H : Azimutdifferenz zu K_M im Horizontsystem, also $\Delta a_H = a_H - \Omega$,
- a_M : Azimut im Montierungssystem bezogen auf den Knoten K_M , $a_M = \Delta a_M + \omega_M$,
- Δa_M : Azimut im Montierungssystem bezogen auf K_S , also $\Delta a_M = a_M - \omega_M$,
- h_H : Höhe im Horizontsystem, von 0° für Horizontlinie zu Z_H wachsend,
- h_M : Höhe im Montierungssystem, von 0° für Basislinie zu Z_M wachsend.

Bei bekannten Werten für Ω , i_M und ω_M gelingt für jeden Punkt P die Koordinatentransformation vom Horizontsystem $P(a_H; h_H)$ ins Montierungssystem $P(\Delta a_M; h_M)$ und umgekehrt. Analog zur Azimutbestimmung müssen die Formeln der sphärischen Trigonometrie hierbei auf das *nautische Dreieck* $\Delta PZ_M Z_H$ angewandt werden:

$$(a_M, h_M) \leftarrow (\Delta a_H, h_H), \text{ dann } \Delta a_M = a_M - \omega_M:$$

$$\begin{aligned} \sin(h_M) &= \cos(i_M) \cdot \sin(h_H) - \sin(i_M) \cdot \cos(h_H) \cdot \sin(\Delta a_H), \\ \sin(a_M) \cdot \cos(h_M) &= \sin(i_M) \cdot \sin(h_H) + \cos(i_M) \cdot \cos(h_H) \cdot \sin(\Delta a_H), \\ \cos(a_M) \cdot \cos(h_M) &= \cos(h_H) \cdot \cos(\Delta a_H), \end{aligned}$$

$$(\Delta a_H, h_H) \leftarrow (a_M, h_M), \text{ mit } a_M = \Delta a_M + \omega_M:$$

$$\begin{aligned} \sin(h_H) &= \cos(i_M) \cdot \sin(h_M) + \sin(i_M) \cdot \cos(h_M) \cdot \sin(a_M), \\ \sin(\Delta a_H) \cdot \cos(h_H) &= -\sin(i_M) \cdot \sin(h_M) + \cos(i_M) \cdot \cos(h_M) \cdot \sin(a_M), \\ \cos(\Delta a_H) \cdot \cos(h_H) &= \cos(h_M) \cdot \cos(a_M). \end{aligned}$$

Anmerkungen:

Übliche Bezeichnungen im sphärischen Dreieck ΔABC entsprechend $\Delta PZ_M Z_H$:

$$P \leftarrow A, \quad Z_M \leftarrow B, \quad Z_H \leftarrow C,$$

$$i_M \leftarrow a, \quad 90^\circ - h_H \leftarrow b, \quad 90^\circ - h_M \leftarrow c, \quad 90^\circ - a_M \leftarrow \beta, \quad 90^\circ + \Delta a_H \leftarrow \gamma.$$

Es gelten: $\sin(90^\circ \pm \varphi) = \cos(\varphi)$, $\cos(90^\circ \pm \varphi) = \mp \sin(\varphi)$.

Justierung der Montierung

- Die G-Sensoren sind in einer elektronischen Wasserwaage enthalten, die zwei Winkelwerte α_0 und α_1 in Grad liefert.
- Die Wasserwaage ist verkippt zur Basisebene der Montierung eingebaut.
- Von oben auf die Ebene der Wasserwaage geblickt liegt im Uhrzeigersinn die α_1 -Sensorachse 90° vor der α_0 -Sensorachse.
- Die Basisebene der Montierung wird auf eine waagerechten Platte gestellt und die Kippwinkel der Wasserwaage werden ausgelesen.
- Aus den Messwerten werden mit der C-Procedur "InclinationOfSensor()" die Systemparameter i_S und ω_S berechnet und ausgegeben, (Testprogramm "SRS_navi_sensors").
- Der Encoder der Azimutachse der Montierung ist so abzugleichen, dass die Knotenlinie der G-Sensoren mit der Grundebene dem Nullwert entspricht.
- Der Encoder der Höhenachse der Montierung ist so abzugleichen, dass der senkrechten Stellung der Antennenkeule zur Azimutachse der Montierung dem Nullwert entspricht.
- Die Richtung der Fadenkreuzmitte der Kamera muss in Richtung der Antennenkeule zeigen.

Handhabung

- Das Stativ mit Montierung und Antenne wird beliebig aufgestellt.
- Die Wasserwaagensignale α_0 und α_1 werden permanent ausgelesen.
- Die C-Procedur "InclinationOfMount()" liefert zu den Signalen α_0 und α_1 zusammen mit den bekannten Systemparametern i_S und ω_S die aktuellen Werte für den Kippwinkel i_M und den Winkel ω_M zwischen der Achse des α_0 -Sensors und der Knotenlinie, (Testprogramm "SRS_navi_mounting").
- Die Umrechnung von Koordinatenwerten aus dem Horizontsystem in das Montierungssystem erfolgt über die C-Procedur "Horizon2Mount()".
- Die beiden Procedures "InclinationOfMount()" und "Horizon2Mount()" sind im Testprogramm "SRS_navi_transform" zusammengefasst. Aus den Systemparametern i_S und ω_S , den Maesswerten α_0 und α_1 und den Koordinatenwerten im Horizontsystem Δa_H und h_H werden die Koordinatenwerte im Montierungssystem Δa_M und h_M berechnet und ausgegeben.

Näherung für kurze Distanzen

Für kurze Abstände auf der Kugeloberfläche ist die Formel nicht geeignet, da die Ableitung $\cos'(0) = 0$ ist und numerische Probleme bei der Genauigkeit von float-Variablen (sieben Dezimalen) auftreten. Sind $(L_M - L_G)$ und $(B_M - B_G)$ kleine Differenzen und wird die Näherung $\cos(x) = 1 - x^2/2$ für $x \approx 0$ verwendet, folgt

$$\begin{aligned}1 - c^2/2 &= \sin(B_M) \cdot \sin(B_G) + \cos(B_M) \cdot \cos(B_G) \cdot (1 - (L_M - L_G)^2/2), \\ &= \cos(B_M - B_G) - \cos(B_M) \cdot \cos(B_G) \cdot (L_M - L_G)^2/2, \\ &= 1 - (B_M - B_G)^2/2 - \cos(B_M) \cdot \cos(B_G) \cdot (L_M - L_G)^2/2, \text{ also} \\ c^2 &= (B_M - B_G)^2 + \cos(B_M) \cdot \cos(B_G) \cdot (L_M - L_G)^2.\end{aligned}$$